**Curso de Iniciación Científica para Jóvenes Talentos**

**Nivel Preavanzado**

**Geometría**

**Concurrencia y Colinealidad**

Rectas Cevianas: Se llama así a los segmentos de recta que unen un vértice de un triángulo a cualquier punto del lado opuesto.

**Teorema de Ceva**

Si en un triángulo se toman puntos sobre los lados respectivamente, de tal forma que las rectas concurren en un punto, entonces:

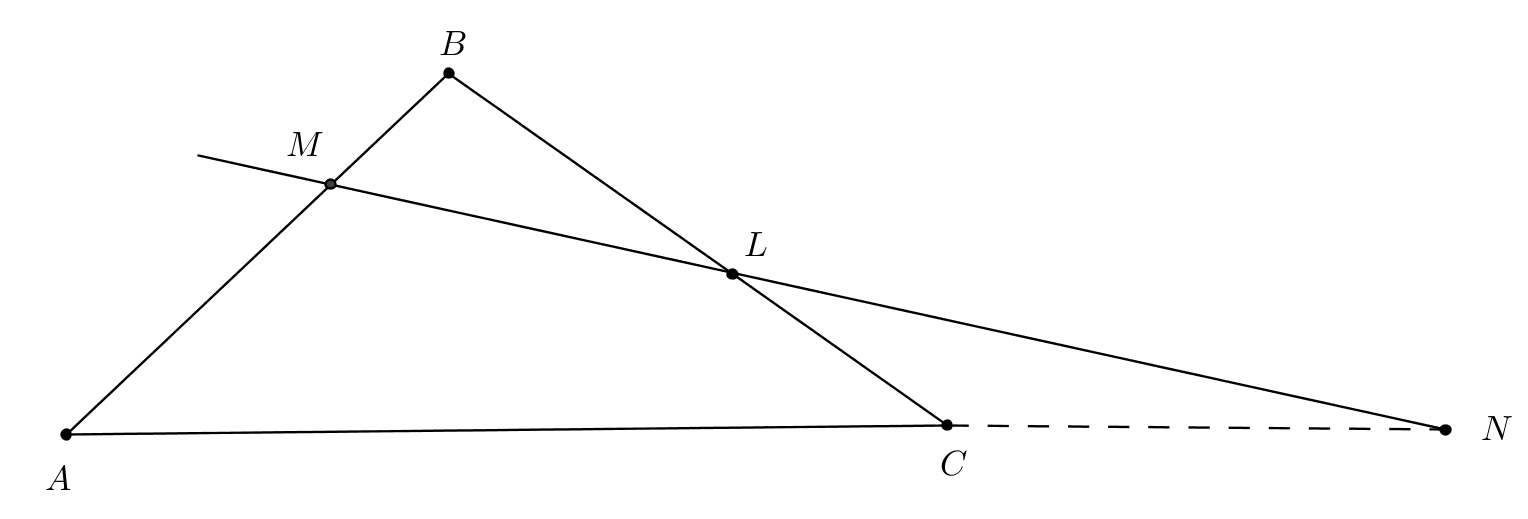
El inverso del teorema, también se cumple, es decir, si la ecuación de arriba es verdadera, entonces las rectas son concurrentes.

**Versión Trigonométrica del Teorema de Ceva**

En un triángulo con , se cumple que:

**Teorema de Menelao**

Si una recta intersecta las rectas de un triángulo en los puntos respectivamente, entonces:



Inversamente, si son puntos de los lados del triángulo y se cumple la ecuación de arriba, entonces los puntos son colineales.

**Problemas Propuestos**

1) Si el incírculo de un triángulo es tangente a los lados en los puntos respectivamente, demostrar que las cevianas concurren en un punto llamado **punto de Gergonne.**

2) Sobre los lados de un triángulo se encuentran respectivamente, de tal manera que , entonces son concurrentes en un punto llamado **punto de Nagel.**

3) Sea un triángulo acutángulo y sean los pies de las alturas trazadas desde . Sean los pies de las perpendiculares desde hacia respectivamente. Probar que las rectas son concurrentes.

4) En la diagonal de un paralelogramo , se toman puntos y tales que . es un punto perteneciente al segmento . Las rectas y se cortan en . La recta paralela a que pasa por y la recta paralela a que pasa por se cortan en . Probar que y son colineales.

5) En un triángulo acutángulo con , es el pie de la bisectriz de sobre y es el pie de la altura respecto al lado . Si y son las intersecciones del circuncírculo del triángulo con y respectivamente, probar que las rectas , y son concurrentes.

6) Sea ABCDEF un hexágono convexo cíclico. Probar que son concurrentes si y sólo si .

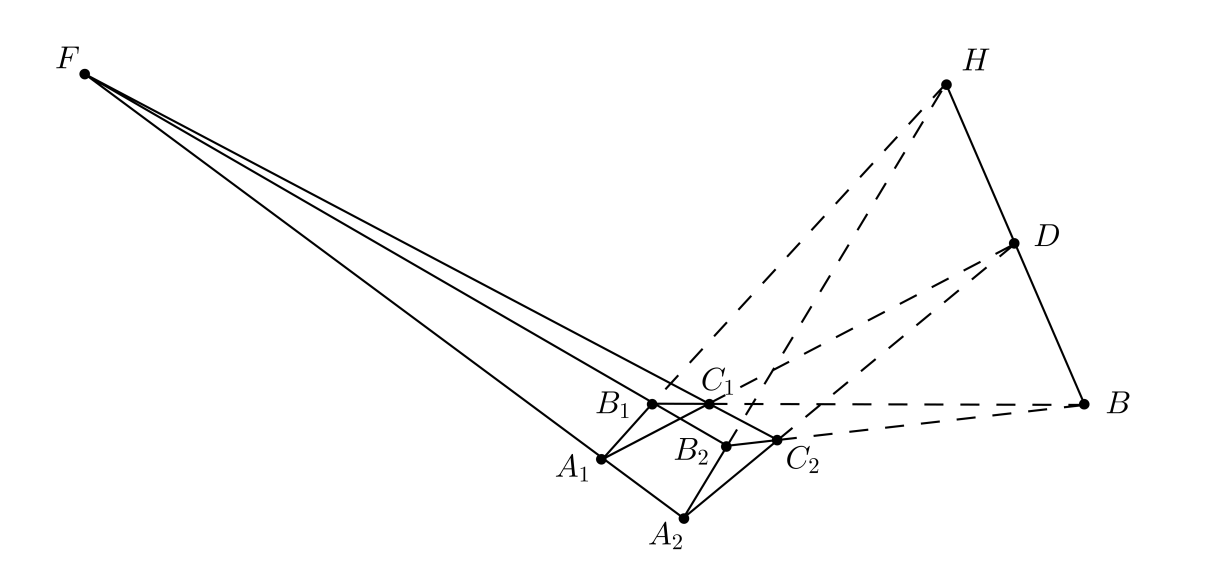
7) En un paralelogramo con , la circunferencia de diámetro corta nuevamente a las rectas y en los puntos y respectivamente. La recta tangente a esta circunferencia que pasa por corta a en . Probar que son colineales.

8) Sea un cuadrilátero cíclico, la intersección de las diagonales y , circuncentro del triángulo y ortocentro del triángulo . Muestre que y son concurrentes.

9) En un triángulo un círculo corta a en y , a en y , a en y . Demostrar que si y son concurrentes, entonces y también son concurrentes.

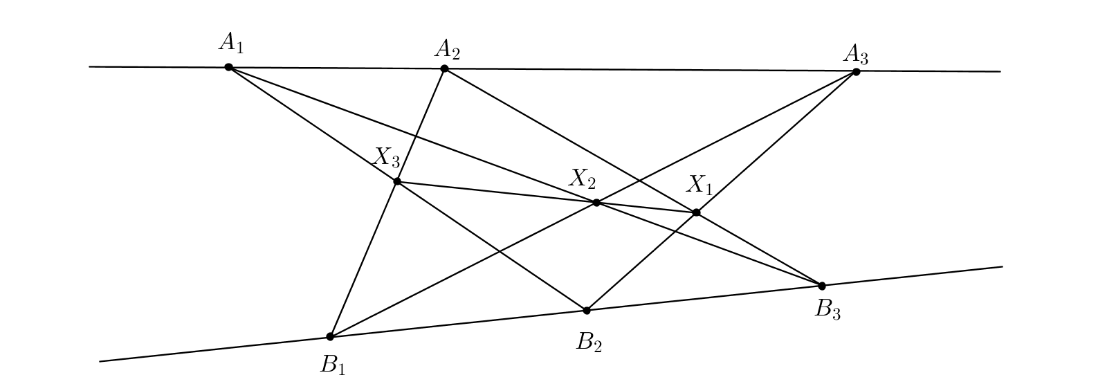
10) Sean los puntos de tangencia del incirculo del triángulo . Si es el centro del círculo que pasa por los puntos medios de , muestre que está sobre la recta que une el incentro y el circuncentro del triángulo.

**Teorema de Desargues**

Sean y dos triángulos. Las rectas , y son concurrentes o todas paralelas si y sólo si los puntos , y son colineales.

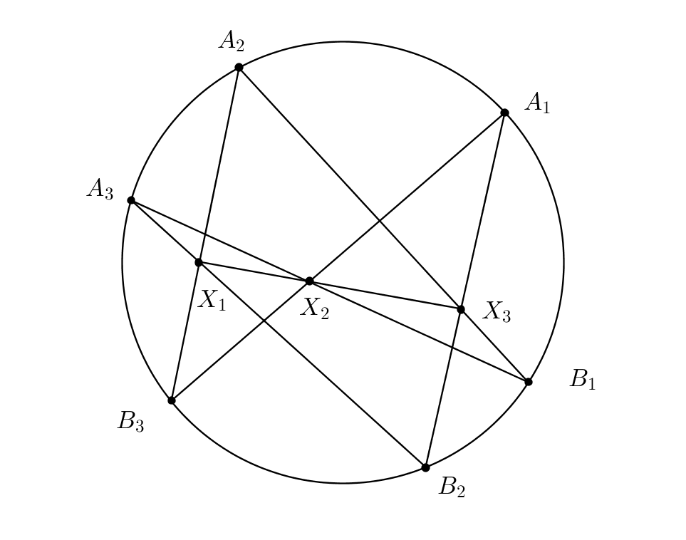
**Teorema de Pappus**

Si , y son puntos de una recta y , y son puntos de otra recta, entonces los puntos , y son colineales.



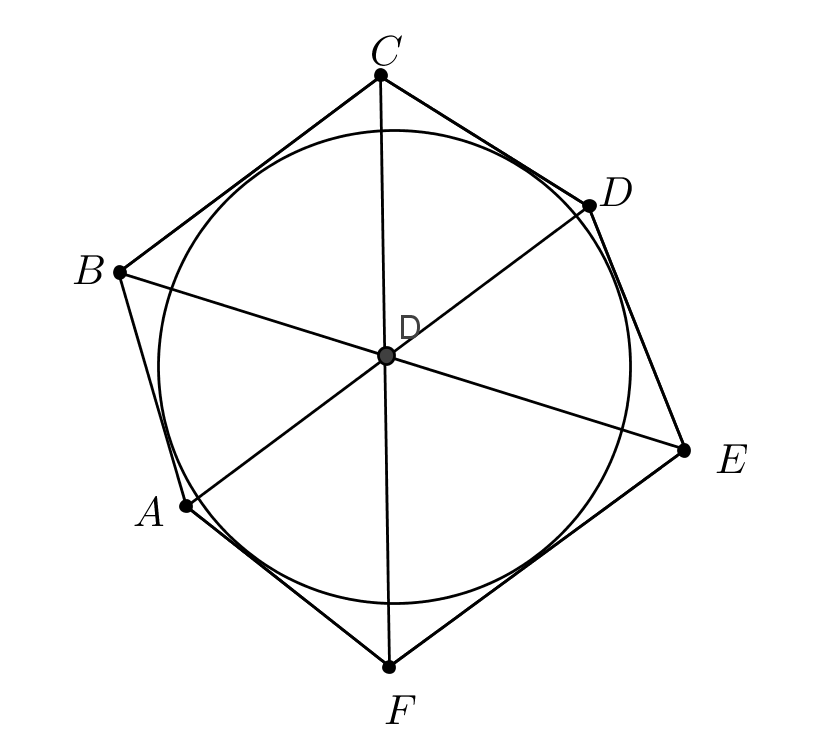
**Teorema de Pascal**

Si , , , , y son puntos de una circunferencia, entonces los puntos , y son colineales.



**Teorema de Brianchon**

Si es un hexágono (no necesariamente convexo) circunscriptible entonces , y son concurrentes.



* Puede ser útil convertir un problema de colinealidad en uno de concurrencia, o viceversa. Es claro que tres rectas , y son concurrentes si y sólo si , y son colineales.
* Otra estrategia para probar la colinealidad de tres puntos , y , es probar que , y un punto adicional son colineales por un lado, y por otro que , y también lo son.

**Ejercicios Propuestos**

1) Las prolongaciones de los lados y de un cuadrilátero se cortan en , mientras que las prolongaciones de los lados y se cortan en . Una recta que pasa por corta a en y a en . Probar que los puntos de intersección de las diagonales de los cuadriláteros , y son colineales y que pertenece a esa misma recta.

2) Las rectas , y se cortan en el punto Pruebe que los puntos de intersección de las líneas y , y , y son colineales.

3) Los puntos y son tomados en una recta y los puntos y son tomados en otra recta. El punto de intersección de con , con y con , son y respectivamente. Pruebe que los puntos se encuentran sobre una línea.

4) Sea un cuadrilátero convexo tal que . Sean y el baricentro y el circuncentro del triángulo . Probar que , y son colineales.

5) Sea un triángulo. Sean , y los puntos medios de los arcos , y , respectivamente, del circuncírculo de . La recta corta a en y a en . corta a en y a en . corta a en y a en . Probar que , y son concurrentes.

6) Sea un cuadrilátero cuyos lados y son tangentes al mismo círculo en los puntos respectivamente. Pruebe que las líneas y son concurrentes.

7) Sea un cuadrilátero cuyos lados y son tangentes al mismo círculo en los puntos respectivamente. Si y intersectan el círculo en y , respectivamente. Pruebe que , y son colineales.

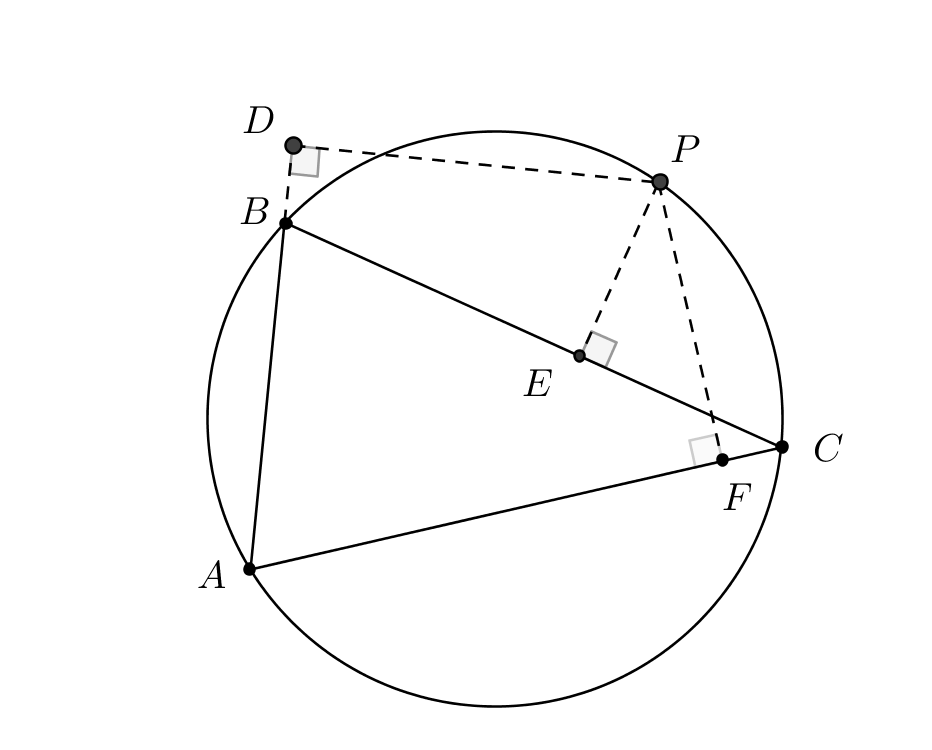
8) Sea un cuadrilátero cuyos lados , , y son tangentes a un círculo en los puntos , , y , respectivamente. Las rectas y cortan al círculo en y , respectivamente. Probar que , y son concurrentes.

9) Sea un pentágono convexo, con , y . Sea un punto en el lado tal que . Pruebe que y

10) Pruebe que las Alturas de un triángulo acutángulo se cortan en un punto.

**Recta de Simson**

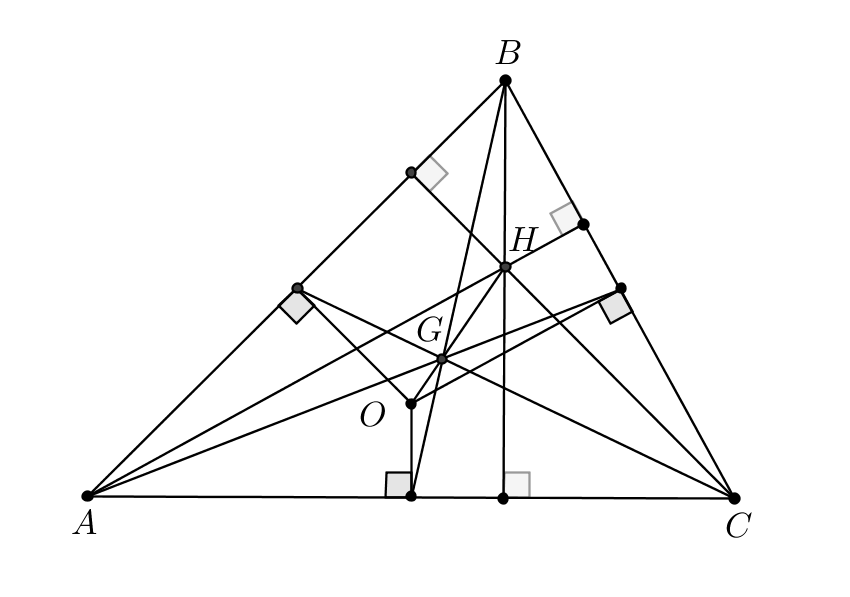
Es la recta que une los pies de las perpendiculares trazados a los lados de un triángulo inscrito de una circunferencia, desde un punto cualquiera de la circunferencia.



**Recta de Euler**

En todo triángulo, el ortocentro, el baricentro y el circuncentro, pertenecen a una recta llamada recta de Euler.

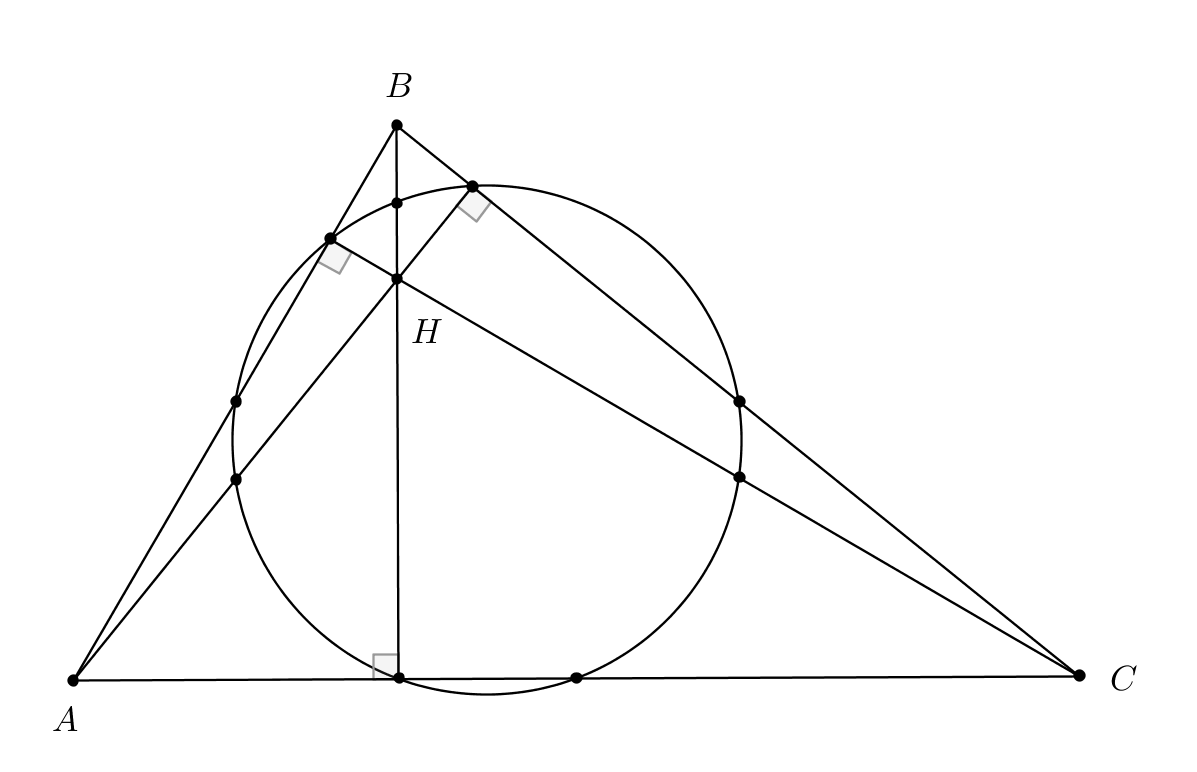
Siendo el ortocentro, el baricentro y el circuncentro, tenemos que



**Circunferencia de Euler**

Dado un triángulo , se conoce como circunferencia de los nueve puntos a la circunferencia que pasa por nueve puntos notables, seis de ellos sobre el mismo triángulo (salvo que el triángulo sea obtusángulo). Estos son:

* el punto medio de cada lado del triángulo,
* los pies de las alturas, y
* los puntos medios de los segmentos determinados por el ortocentro y los vértices del triángulo.



La recta de Simson tiene además la siguiente propiedad. Si se toman dos puntos y de la circunferencia circunscrita a un triángulo, de forma que y sean diametralmente opuestos, y se dibujan las rectas de Simson asociadas a dichos puntos, las dos rectas de Simson dibujadas se cortan en un punto que pertenece a la circunferencia de Euler de dicho triángulo.

**Problemas Propuestos**

1) Sean puntos en una misma circunferencia. Pruebe que el menor ángulo formado entres las rectas de Simson de y con respecto al triángulo es igual a la medida del menor arco

2) (Cono Sur 2005/2) Sean las alturas de un triángulo acutángulo. Sean las proyecciones de sobre , respectivamente. Pruebe que:

a) están alineados.

b) .

3) Sea un pentágono convexo inscrito en una circunferencia de diámetro Sean los pies de las perpendiculares desde a las líneas , respectivamente. Pruebe que el ángulo agudo formado por las líneas y mide la mitad del ángulo donde es punto medio de

4) Los puntos y se encuentran sobre una misma recta, el punto se encuentra fuera de esta recta. Pruebe que los centros de las circunferencias circunscritas a los triángulos , y el punto son puntos de una misma circunferencia.

5) Pruebe que si la recta de Euler pasa por el centro de la circunferencia inscrita a un triángulo, entonces el triángulo es isósceles.

6) Las alturas del triángulo se cortan en el punto . Sea un punto de la circunferencia circunscrita. Pruebe que la recta de Simson, trazada desde el punto respecto al triángulo divide al segmento en partes iguales.

7) El cuadrilátero es inscriptible en una circunferencia. Sea la recta de Simson trazada desde el punto con respecto al triángulo . Las líneas se definen de la misma manera. Pruebe que estas rectas se cortan en un punto.

8) En el triángulo , las alturas , y son dibujadas. Sean y son diámetros de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo . Pruebe que las líneas y o se cortan en un punto o son paralelas.

9) Sea una cuerda del circuncírculo del triángulo paralela al lado . Muestre que la recta de Simson del punto con respecto a es perpendicular al la recta .

10) Las alturas del triángulo se cortan en un punto

a) Pruebe que los triángulos y tienen el mismo círculo de los 9 puntos.

b) Pruebe que las rectas de Euler de los triángulos y son concurrentes.